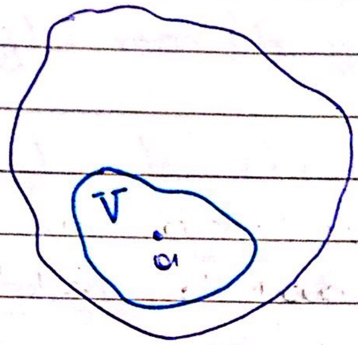
23.02.16

(E,ρ), $\alpha \in E$, $U \subseteq E$: U περιοχή του $\alpha \Leftrightarrow (\exists r>0)\, B(\alpha,r) \subseteq U$

$(\Rightarrow \alpha \in U = U(\alpha))$

ΠΡΟΤΑΣΗ Για κάθε περιοχή U του σημείου α, υπάρχει περιοχή V του α τέτοια, ώστε η U να είναι περιοχή κάθε σημείου του V

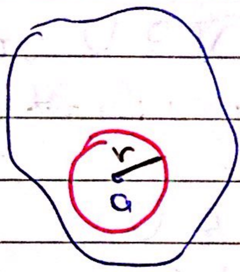


$U = U(\alpha)$

αυτή η πρόταση, και οι δυο τελευταίες του προηγούμενου μαθήματος στο βιβλίο είναι μία πρόταση (στη σελ. 32)

Απόδειξη

Αφού $U = U(\alpha) \Rightarrow (\exists r>0)\, B(\alpha,r) \subseteq U$



$U = U(\alpha)$

Θεωρώ τυχόν $x \in B(\alpha,r)$.
Τότε η $B(\alpha,r)$ είναι περιοχή του x.

Άρα $B(\alpha,r) = V \xrightarrow{B(\alpha,r) \subseteq U} V(x) \subseteq U$ (υπερσύνολο περιοχής είναι κι αυτό περιοχή)

$\Rightarrow U$ περιοχή του x

Σε προηγούμενο μάθημα είχαμε αναφέρει τη διακριτή μετρική

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

(E, ρ) διακριτός μ.χ.

(Πάμε να δούμε τη μορφή έχει η σφαιρική περιοχή μ' αυτή τη μετρική)

$a \in E$, $B(a,r) = ;$

Για $0<r$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις — $r \leq 1$ — $r > 1$

για $r=1$:

$$B(a,1) = \{x \in E : \rho(x,a) < 1\}$$
$$= \{x \in E : \rho(x,a) = 0\}$$
$$= \{a\}$$

→ για οποιοδήποτε αριθμό $r \leq 1$ θα βρίσκαμε το ίδιο

$$B(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) < r\}$$

για $r=2$: $B(a,2) = \{x \in E : \rho(x,a) < 2\}$
$= E$

→ E θα βγει και για οποιαδήποτε άλλη τιμή για $r > 1$

Άρα:

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & , r \leq 1 \\ E & , r > 1 \end{cases}$$

Εφαρμογή: Ν.δ.ο. σε τυχόντα μ.χ. E και για $a \in E$ και $r > 0$, ισχύει $\delta(B(a,r)) \leq 2r$

Απόδειξη

Έστω x, y εν $B(a,r)$

$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,y)$ (με την τριγωνική ιδιότητα, παρεμβάλλω το κέντρο της σφαίρας)

$< r + r$

$= 2r$ ⟹ Το $2r$ είναι αφ. του $\rho(x,y)$ για όλα τα (x,y) στη σφαίρα άρα $\sup_{(x,y)\in (B(a,r))^2} \rho(x,y) \le 2r \Rightarrow \delta(B(a,r)) \le 2r$

Πάμε να δούμε αν όντως υπάρχουν περιπτώσεις που δεν ισχύει η ισότητα.

$B(a,1) = \{a\}$

$\delta(B(a,r)) = \delta(\{a\}) = 0 < 2\cdot 1$ άρα όντως υπάρχουν.

$A \subseteq E$, $a \in E$

ΟΡΙΣΜΟΣ a εσωτερικό σημείο του $A \overset{op.}{\Leftrightarrow} (\exists r>0)\, B(a,r) \subseteq A$

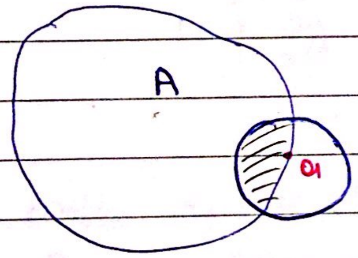
$(\Rightarrow a \in A)$

ΟΡΙΣΜΟΣ A° πυρήνας ή εσωτερικό του A

$A^\circ = \{x : x$ εσωτερικό σημείο του $A\}$

Παρατήρηση: $A^\circ \subseteq A$

ΟΡΙΣΜΟΣ a σημείο επαφής του $A \overset{op.}{\Leftrightarrow} (\forall r>0)\, B(a,r) \cap A \neq \emptyset$



Το A είναι το «μέσα», δηλ. το σχήμα χωρίς τη γραμμή.

Δηλ. μπορεί ένα σημείο επαφής να μην είναι σημείο του συνόλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ $\bar{A}$ θήκη ή κάλυμμα του A

$\bar{A} = \{x : x$ σημείο επαφής του $A\}$

Προσοχή! Το εσωτερικό σημείο ορίζεται με το $\exists$ ενώ το σημείο επαφής ορίζεται με το $\forall$

NOTE: Όλα τα εσωτερικά σημεία, είναι και επαφής. Αν όμως δεν είναι επαφής, δεν μπορούν να είναι εσωτερικά.

ΠΡΟΤΑΣΗ (i) $a \in A^{\circ} \iff (\exists U(a))\ U(a) \subseteq A$

(ii) $a \in \bar{A} \iff (\forall U(a))\ U(a) \cap A \neq \emptyset$

} και τα δύο είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες (σε βαθμό που μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτές, αντί των ορισμών)

\+

σκέφτομαι ότι αν χρησιμοποιώ αυτά, μπορώ να παραλείψω τη μετρική.

Απόδειξη

(i)

($\Longrightarrow$) Έστω $a \in A^{\circ} \Rightarrow (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq A$

Αρκεί να ληφθεί $B(a,r) = U(a)$

($\Longleftarrow$) Έστω ισχύει ότι $(\exists U(a))\ U(a) \subseteq A$

$U(a)$ περιοχή του $a \Rightarrow (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq U(a)$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq A$

$\Rightarrow a \in A^{\circ}$

(ii)

για να ταιριάζει το $\nexists$ $\Rightarrow$ την παίρνουμε τυχούσα και την σταθεροποιούμε

($\Longrightarrow$) Έστω $a \in \bar{A}$. Θεωρούμε τυχαία περιοχή $U(a)$ του a.

Τότε $(\exists r>0)\ \underline{B(a,r) \subseteq U(a)}$

$a \in \bar{A} \Rightarrow B(a,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow{B(a,r)\cap A \subseteq U(a) \cap A} U(a) \cap A \neq \emptyset$

($\Longleftarrow$) Έστω $(\forall U(a))\ U(a) \cap A \neq \emptyset$ και $B(a,r)$, $r>0$ τυχούσα σφαιρική περιοχή.

Τότε $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ (αφού η σφαιρική περιοχή είναι κι αυτή περιοχή)

$\overset{\text{ορ}}{\Longrightarrow} a \in \bar{A}$

ΠΡΟΤΑΣΗ Για τυχόντα υποσύνολα A, B ενός μ.χ. ισχύει:

(i) $A^{\circ} \subseteq A$ (i') $A \subseteq \bar{A}$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ (ii') $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

(iii) $(A^{\circ})^{c} = \overline{A^{c}}$ (iii') $(\bar{A})^{c} = (A^{c})^{\circ}$

Πριν δούμε την απόδειξη, ορίζουμε: $\emptyset^{\circ} = \bar{\emptyset} = \emptyset$

$E^{\circ} = \bar{E} = E$

Απόδειξη

(i') Έστω $x \in A$ και $B(x,r)$ τυχαία περιοχή του x.

$$\left.\begin{array}{l} x \in B(x,r) \\ x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow x \in B(x,r) \cap A \neq \emptyset \xrightarrow{r \text{ τυχόν}} x \in \bar{A}$$

Αποδεικνύεται από τα (i), (i') ότι: $\boxed{A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}}$

NOTE: Οι A°, $\bar{A}$ είναι αύξοντες τελεστές, δηλ. διατηρούν τη σχέση του υποσυνόλου (από τα (ii), (ii')).

(ii) Έστω $A \subseteq B$ και x τυχόν, $x \in A^\circ$.
Τότε $(\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq A \subseteq B \Longrightarrow x \in B^\circ$
Άρα $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(ii') Έστω $A \subseteq B$ και a τυχόν, $a \in \bar{A}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τότε } (\forall U(a))\ U(a) \cap A \neq \emptyset \\ \text{Αφού } A \subseteq B \Rightarrow U(a) \cap A \subseteq U(a) \cap B \end{array}\right\} \Rightarrow U(a) \cap B \neq \emptyset \xrightarrow{U(a) \text{ τυχαία}} a \in \bar{B}$$

(iii) Για τυχόν x έχουμε: $x \in (A^\circ)^c \Leftrightarrow x \notin A^\circ$
$\Leftrightarrow \sim x \in A^\circ$
$\Leftrightarrow \sim \left[(\exists U(x))\ U(x) \subseteq A \right]$
$\Leftrightarrow (\forall U(x))\ U(x) \nsubseteq A$
$\Leftrightarrow (\forall U(x))\ U(x) \cap A^c \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$

(iii') Για τυχόν x έχουμε: $x \in (\bar{A})^c \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$
$\Leftrightarrow \sim x \in \bar{A}$
$\Leftrightarrow \sim \left[(\forall r>0)\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \right]$
$\Leftrightarrow (\exists r>0)\ B(x,r) \cap A = \emptyset$
$\Leftrightarrow (\exists r>0)\ B(x,r) \subseteq A^c$
$\Leftrightarrow x \in (A^c)^\circ$

Πάμε τώρα στην παραπάνω περίπτωση να δούμε ποια είναι η μορφή της σφαιρικής περιοχής

$(\mathbb{R}, |\,|)$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$

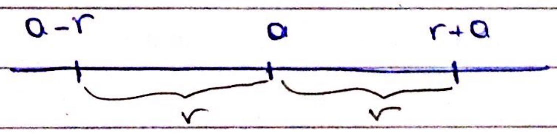
$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : \rho(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$, $(*)$

<u>Ισχύει</u>: $|x-a| < r \iff -r < x-a < r$

$\iff -r+a < x < r+a$

$\iff a-r < x < a+r$

με άλλα λόγια



άρα, $(*) = (a-r, a+r)$

<u>Συμπέρασμα</u>: Στον $(\mathbb{R}, |\,|)$ η $B(a,r)$ είναι ένα ανοιχτό συμμετρικό διάστημα.